Početní část 1 - 10.6.2021

1. Nejdříve si všimneme, že rovnice má jedno konstantní řešení $y \equiv 0$. Také si můžeme všimnout, že funkce y musí být nerostoucí pro $x < 0$ a neklesající pro $x > 0$. Nyní uvažujeme případ, že řešení $y > 0$. Potom platí

$$\frac{y'}{\sqrt{y}} = \frac{2x}{(2+x^2)} \quad \Leftrightarrow \quad (2\sqrt{y})' = (\ln(x^2+2))' \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{(C_1 + \ln(x^2+2))^2}{4}.$$

To vše platí pokud $C_1 + \ln(x^2+2))^2 > 0$.

Obdobně, pokud uvažujeme $y < 0$ dostáváme

$$\frac{y'}{\sqrt[3]{|y|}} = \frac{2x}{(2+x^2)} \quad \Leftrightarrow \quad -\left(\frac{3|y|^{\frac{2}{3}}}{2}\right)' = (\ln(x^2+2))' \quad \Leftrightarrow y = -\left(\frac{2(C_2 - \ln(x^2+2))}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$$

a to vše na intervalu, kde platí $C_2 - \ln(x^2+2) > 0$.

Nyní určíme konečnou formu řešení. Nejdříve se soustředíme na okolí bodu $x = 0$. Víme, že

$$y(0) = -(2\ln(3)/3)^{3/2}$$

a tedy y musí být na okolí nuly záporné. Pak tedy musí mít tvar

$$y(x) = -\left(\frac{2(C_2 - \ln(x^2+2))}{3}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Dosazením $x = 0$ máme

$$-(2\ln(3)/3)^{3/2} = -\left(\frac{2(C_2 - \ln 2)}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \implies C_2 = \ln 6.$$

Takto nalezená část řešení je jednoznačně určena na intervalu, kde platí $C_2 - \ln(x^2+2) > 0$, což platí pro $x \in (-2, 2)$.

Na okolí bodu $x = -5$ má řešení tvar

$$y = \frac{(C_1 + \ln(x^2+2))^2}{4}$$

a použitím podmínky $y(-5) = (\ln^2(9/2))/4$ dostaneme, že

$$y = \frac{(-\ln 6 + \ln(x^2+2))^2}{4}$$

a to na intervalu, který obsahuje bod $x = -5$ a splňuje $-\ln 6 + \ln(x^2 + 2) > 0$, což je $x \in (-\infty, -2)$.

Zbývá okolí bodu $x = 5$. Tam opět musí platit

$$y = \frac{(C_1 + \ln(x^2+2))^2}{4}$$

a dosazením podmínky $y(5) = (\ln^2(3/2))/4$ máme tvar

$$y = \frac{(-\ln 18 + \ln(x^2+2))^2}{4}$$

tam kde $(-\ln 18 + \ln(x^2 + 2) > 0$, což platí pro $x \in (4, \infty)$.

Vidíme, že řešení můžeme dodefinovat nulou v bodě $x = -2$. Na druhou stranu zatím nemáme žádnou podmínku na řešení pro $x \in (2, 4)$. Nicméně už víme, že řešení musí být neklesající pro $x > 0$. Protože $y(2) = y(4) = 0$ jediná možnost jak dodefinovat řešení je $y(x) = 0$ pro $x \in (2, 4)$.

Celkem tedy máme jednoznačně určené řešení

$$y(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}\ln^2 \frac{x^2+2}{6} & x \in (-\infty, -2), \\ -\left(\frac{2}{3}\ln\frac{6}{x^2+2}\right)^{\frac{3}{2}} & x \in [-2, 2], \\ 0 & x \in (2, 4], \\ \frac{1}{4}\ln^2 \frac{x^2+2}{18} & x \in (4, \infty) \end{cases}$$

2. Buď $A = [t_1^2, t_1]$ bod paraboly a $B = [t_2 - 4, t_2]$ bod přímky. Jejich vzdálenost je dána pomocí funkce f

$$f(t_1, t_2) := \sqrt{(t_1^2 - (t_2 - 4))^2 + (t_1 - t_2)^2}.$$

Zajjímá nás tedy minimum funkce f na množině $\mathbb{R}^2$.

Spočteme parciální derivace funkce f

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t_1} &= \frac{2t_1(t_1^2 - (t_2 - 4)) + t_1 - t_2}{\sqrt{(t_1^2 - (t_2 - 4))^2 + (t_1 - t_2)^2}}, \\ \frac{\partial f}{\partial t_2} &= \frac{-(t_1^2 - (t_2 - 4)) + t_2 - t_1}{\sqrt{(t_1^2 - (t_2 - 4))^2 + (t_1 - t_2)^2}} \end{aligned}$$

A získáme tak soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 0 &= 2t_1(t_1^2 - (t_2 - 4)) + t_1 - t_2, \\ 0 &= -t_1^2 + t_2 - 4 + t_2 - t_1 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} t_1 &= \frac{1}{2}, \\ t_2 &= \frac{19}{8}. \end{aligned}$$

Vidíme, že máme jen jeden podezřelý bod a tedy tento bod musí být bodemminima. Hledaný bod je tedy $A = [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$.